

Sulla non autenticità delle definizioni degli enti geometrici fondamentali contenute negli *Elementi* di Euclide

Lucio Russo¹

Introduzione

In questo lavoro si sostiene la tesi che le definizioni degli enti geometrici fondamentali con cui iniziano gli *Elementi* di Euclide siano in realtà brani delle *Definizioni* di Erone di Alessandria inseriti in età imperiale nel testo degli *Elementi*.

La tesi è esposta in vari passi. Dapprima, nel §1, verificheremo lo stretto legame tra le definizioni contenute negli *Elementi* e quelle di Erone. Nel §2 mostreremo che, alla luce delle informazioni che abbiamo sui testi di Euclide e di Erone, il legame può essere plausibilmente spiegato, inversamente all'interpretazione più ovvia, come una dipendenza del testo tramandatoci degli *Elementi* dall'opera di Erone. Nel §3 dimostreremo che altre definizioni inserite nel I libro degli *Elementi* sono state effettivamente estratte dall'opera di Erone. Nel §4 esporremo le ragioni metodologiche che fanno ritenere che le definizioni degli enti geometrici fondamentali abbiano avuto la stessa origine. Nel §5 troveremo alcuni riscontri alla nostra tesi nelle fonti, analizzando in particolare tre passi: uno di Erone e due di Sesto Empirico. Infine, nel §6, esporremo alcuni argomenti basati sul confronto tra le due serie di definizioni, mostrando in particolare come la derivazione da Erone permetta di spiegare in modo naturale la formulazione della definizione di linea retta inserita negli *Elementi*, che appare altrimenti incomprensibile. Le conclusioni sono tratte nel §7.

1. Le definizioni degli enti geometrici fondamentali presenti negli *Elementi* di Euclide e nelle *Definizioni* di Erone.

Nella grande maggioranza delle definizioni (ὄροι) presenti negli *Elementi* di Euclide concetti matematici nuovi sono definiti correttamente in termini di concetti matematici già noti. Sono però presenti negli *Elementi* ([1], [2]) anche alcuni tentativi di "definire" enti matematici fondamentali in termini del linguaggio ordinario. In particolare ci occuperemo qui delle prime sette definizioni del I libro, cioè quelle di punto, linea, retta, superficie e piano². Come esempi di tali definizioni, ricordiamo quella di punto (def. 1):

¹ Dipartimento di matematica, Università di Roma "Tor Vergata".

² Cinque enti sono definiti in sette definizioni perché punti e linee sono definiti due volte

Σημεῖόν ἐστιν, οὐ μέρος οὐθέν, "punto è ciò che non ha parti"

e quella di linea retta (def. 4):

Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, "linea retta è [quella] che giace allo stesso modo rispetto a [tutti] i suoi punti".

"Definizioni" del genere sono oggi naturalmente considerate inutili e l'averle inserite negli *Elementi* è in genere visto come un grave limite di Euclide. Diversi autori si sono chiesti se queste definizioni fossero originali di Euclide o se fossero state attinte da Euclide alla tradizione precedente³. Sulla loro autenticità non si sono però in genere avanzati dubbi.

Gli stessi enti geometrici (punto, linea, retta, superficie e piano) sono "definiti" anche in un'altra opera ellenistica, risalente al I sec. d.C.: le *Definizioni di Erone* [3]. Confrontando le due serie di definizioni, si può verificare che quelle presenti negli *Elementi* sono brani (in genere quelli iniziali) delle corrispondenti "definizioni" di Erone. In particolare:

- La def. 1 degli *Elementi* coincide con l'inizio della def. 1 di Erone.
- La def. 2 degli *Elementi* coincide con l'inizio della def. 2 di Erone.
- La def. 3 degli *Elementi* corrisponde ad un altro brano della def. 1 di Erone.
- La def. 4 degli *Elementi* (salvo l'ovvia e necessaria omissione delle parole μὲν οὖν che in Erone hanno solo una funzione di legame sintattico con il contesto) coincide con l'inizio della def. 4 di Erone.
- La def. 5 degli *Elementi* (salvo l'inserimento di un δέ, con la funzione di legame avversativo con la definizione precedente) coincide con l'inizio della def. 8 di Erone.
- La def. 6 degli *Elementi* corrisponde ad un altro brano della def. 2 di Erone.
- La def. 7 degli *Elementi* coincide con l'inizio della def. 9 di Erone.

Alcune considerazioni sono del tutto ovvie. Innanzitutto le coincidenze sono evidentemente troppe per essere casuali, soprattutto tenendo conto che non si tratta in realtà di "definizioni" nel senso tecnico della parola, ma di frasi spesso vaghe, costruite con il linguaggio comune. Poiché Erone si riferisce esplicitamente ad Euclide nell'introduzione alla sua opera, l'interpretazione più ovvia, usualmente accettata, è naturalmente la seguente:

³ La conclusione, inserita in tutti i commenti agli *Elementi*, è che esse risalgano in realtà, almeno in parte, alla tradizione pre-ellenistica, come vedremo e come è del resto facile verificare.

1. Le definizioni considerate sono originali di Euclide e quelle di Erone ne sono ampliamenti esplicativi.

Vi è però anche un'altra possibilità logica:

2. Tali definizioni mancavano nel testo originale di Euclide e non sono altro che estratti di quelle di Erone, inserite successivamente nel testo degli *Elementi*.

Se le sette definizioni sono veramente di Euclide, il riferimento esplicito di Erone ad Euclide, implicando una relazione diretta tra i due testi, non lascia alternative alla prima possibilità. Se invece le definizioni non sono originali, il loro inserimento nel testo degli *Elementi* deve essere avvenuto non prima del III sec. d.C., giacché è generalmente ammesso che Sesto Empirico disponesse ancora del testo originale di Euclide⁴. Esse quindi dovevano mancare nel testo degli *Elementi* usato da Erone e dovettero essere inserite quando le *Definizioni* di Erone da almeno un secolo erano usate nell'insegnamento della matematica. In questo caso la seconda possibilità è evidentemente l'unica che possa spiegare il legame tra i due testi. Tale legame è quindi in ogni caso diretto e possiamo escludere possibilità diverse dalle due precedenti (quale una derivazione dei due testi da una fonte comune). Ogni argomento contro l'autenticità delle prime sette definizioni degli *Elementi* sarà quindi automaticamente un argomento a favore della seconda possibilità.

2. Plausibilità della derivazione da Erone.

La seconda possibilità considerata nel paragrafo precedente può sembrare a prima vista del tutto teorica. Per mostrare che essa non corrisponde ad una ricostruzione artificiosa, ma merita di essere presa in seria considerazione cominciamo con il superare alcune obiezioni preliminari rispondendo alle domande seguenti:

- a) Quanto è attendibile il testo che abbiamo degli *Elementi*?
- b) Se Erone non ha tratto da Euclide le definizioni considerate, quali possono essere state le sue fonti?
- c) Attraverso quali canali brani delle definizioni di Erone potrebbero essere penetrati negli *Elementi*?

Sull'attendibilità delle redazioni degli *Elementi* che ci sono state tramandate sappiamo che:

⁴ Cfr. l'introduzione di Heiberg al V volume della sua edizione dell' "Opera omnia" di Euclide ([1], vol.V, introduzione); cfr. anche [2], vol.1, pag. 63.

1. Tutti i manoscritti noti del testo degli *Elementi*, tranne uno, risalgono alla redazione curata da Teone di Alessandria nel IV sec. d.C.. Sappiamo da Teone stesso che egli vi aveva inserito aggiunte di sua mano. Nel suo commento all'*Almagesto* [4], infatti, Teone parla di un teorema da lui dimostrato nella sua redazione degli *Elementi*⁵. D'altra parte sappiamo bene cosa si intendesse in epoca imperiale per redazione di un classico: ad esempio nel caso dell'*Ottica* di Euclide possiamo verificare la distanza della redazione dello stesso Teone dall'originale, giacché Heiberg ritrovò nella Biblioteca Vaticana un manoscritto notevolmente diverso, risalente a una redazione precedente⁶.

2. L'unico manoscritto degli *Elementi* contenente una redazione più antica di quella di Teone è stato trovato anch'esso da Heiberg nella Biblioteca Vaticana. Heiberg era convinto che questa redazione non potesse risalire a prima del III sec. d.C.. Il disinteresse di Teone per la fedeltà al testo originale doveva essere stato condiviso dall'autore di quest'altra redazione, giacché il manoscritto "vaticano", che non è troppo diverso da quelli "teonini", contiene anch'esso varie interpolazioni, come è provato dal confronto con i pochi frammenti contenuti in papiri e con le citazioni di Euclide presenti in varie fonti⁷. Le interpolazioni riconosciute come tali dagli studiosi moderni sono in genere aggiunte di carattere illustrativo ed esplicativo.

3. Per vagliare l'attendibilità del testo degli *Elementi*, uno strumento il cui uso deve ovviamente essere tentato è l'analisi dei papiri ritrovati. Purtroppo ben poca luce diretta sulla questione che ci interessa può essere fatta in questo modo, giacché sono stati rinvenuti solo pochissimi frammenti del testo degli *Elementi* in papiri e solo due di tali papiri (P. Mich. III, nr. 143 e P. Hercul. nr. 1061) contengono delle definizioni. Nel primo appaiono le prime 10 definizioni del I libro, essenzialmente nella stessa forma contenuta nei manoscritti; si tratta però di un papiro risalente al III sec. d.C., quindi presumibilmente della stessa epoca della redazione trasmessa dal manoscritto vaticano. Il papiro, scritto probabilmente da uno studente, contiene solo il testo delle definizioni, mancando in particolare ogni riferimento ad Euclide. Mentre esso dimostra che all'epoca della sua stesura le prime 10 definizioni erano già insegnate nella forma che ci è rimasta, non si può essere certi che tali definizioni venissero già attribuite tutte ad Euclide. Il secondo papiro contiene una sola definizione e risale ad un'epoca che si ritiene precedente la corruzione del testo euclideo. La definizione in esso contenuta non riguarda però un ente fondamentale, ma è quella, del tutto corretta,

⁵ Si tratta di una affermazione aggiunta alla proposizione 33 del VI libro.

⁶ Ambedue le redazioni sono riportate in [5].

⁷ I passi riconosciuti come interpolati sono discussi sia in [1] che in [2] via via che si presentano.

di cerchio ⁸; va inoltre notato che tale definizione manca di una proposizione presente in tutti i manoscritti noti, compreso quello vaticano. Ritorniamo su questa testimonianza.

Quanto alla seconda domanda, non è difficile individuare le possibili fonti di Erone. Ad esempio gran parte dei concetti usati nella definizione 1 di Erone, che è in realtà una lunga illustrazione del concetto di punto ⁹, sono in Aristotele. Tra i tanti passi aristotelici su questo argomento citiamo ad esempio: Ph. IV, 11, 220a 15 segg., dove si parla del punto come "estremità di una linea", si dice che il punto non è una parte della linea e si considera l'analogia tra punto ed istante; Metaph. V, 6, 1016b 24-30, dove si insiste sulla indivisibilità che caratterizza il punto; Cael. III, 1, 300a 14, dove si riprende l'analogia tra punto ed istante di tempo. Per fare un altro esempio, la caratterizzazione delle linee come estremità delle superfici, contenuta in un passo della def. 2 di Erone, (corrispondente alla seconda definizione di linea degli *Elementi*, data nella def. 6) è la stessa definizione platonica già criticata da Aristotele, Top. VI, 6, 143 b 11. In altri casi Erone può avere attinto a fonti successive ad Euclide. Ad esempio, come vedremo in maggior dettaglio, la definizione di linea retta sembra derivare da Archimede.

Per quanto riguarda, infine, i canali attraverso i quali brani delle definizioni di Erone possono essere penetrati negli *Elementi*, ricordiamo che le *Definizioni* non sono l'unica testimonianza dell'opera di Erone come divulgatore di Euclide.

Sappiamo infatti, sia da Proclo (V sec. d. C.) che da fonti arabe, che Erone aveva scritto un commento agli *Elementi*, apparentemente del tutto perso, di carattere divulgativo. Sembra ovvio che le due opere di Erone fossero in qualche modo collegate. Forse le *Definizioni* rimasteci sono in realtà estratti dal commento, ma anche se si tratta di due opere distinte si può supporre che nel suo commento Erone avesse inserito brani delle sue *Definizioni*. Anche se certamente il commento di Erone era in origine riconoscibile dal testo di Euclide, questa distinzione aveva ben poche possibilità di conservarsi nei secoli successivi, nei quali certamente l'opera di Euclide fu copiata a fini didattici senza alcuno scrupolo filologico.

D'altra parte alcuni brani contenuti in tutti i manoscritti noti degli *Elementi* sono stati identificati come interpolazioni provenienti dal commento di Erone sulla base di varie testimonianze. Alcuni di tali brani sono attribuiti ad Erone dal commentatore arabo an-Nairīzī¹⁰ nel suo commento ad Euclide. Altri brani sono attribuiti ad Erone da

⁸ La definizione di cerchio data in questo papiro è citata e discussa da Heath in [2], vol.1, pp.50 e 184.

⁹ La prima parte di questa "definizione" è riportata nel prossimo §6.

¹⁰ Ad esempio la proposizione 12 del III libro; cfr.[2], vol. 2, pp. 28-29. Una traduzione latina (di Gherardo da Cremona) del commento di an-Nairīzī è stata pubblicata da Curtze (Leipzig, 1899) dopo l'edizione critica di Heiberg del testo di Euclide.

Proclo ([6]) ma non da an-Nairīzī¹¹. Poiché non vi sono motivi per dubitare di tali attribuzioni, bisogna dedurre che nessuno dei due commentatori può fornirci prove di autenticità. Evidentemente sia Proclo che an-Nairīzī avevano manoscritti in cui il testo originale di Euclide non era più distinguibile dalle aggiunte provenienti dal commento di Erone e le attribuzioni ad Erone erano basate su altre fonti successivamente perse.

In sintesi, si può rispondere alle domande iniziali affermando che:

a) La presenza delle prime sette "definizioni" nel testo tramandatoci degli *Elementi* non è certo sufficiente per attribuirle con sicurezza ad Euclide.

b) Anche prescindendo da Euclide, Erone avrebbe avuto certamente a disposizione tutto il materiale sufficiente per derivarne le sue "definizioni" degli enti geometrici fondamentali.

c) Poiché nessuna redazione nota risale ad epoche precedenti il III sec. d.C. e poiché i redattori degli *Elementi* del II e III sec. d.C. avevano certamente a disposizione il testo di Euclide commentato da Erone e d'altra parte non avevano alcuno scrupolo filologico di fedeltà al testo originale, l'inserimento di brani di Erone nel testo degli *Elementi* appare del tutto naturale (ed anzi in alcuni casi è anche direttamente documentato).

In definitiva, alla luce delle informazioni che abbiamo sui testi di Euclide e di Erone, l'ipotesi che le coincidenze notate nel §1 siano dovute al fatto che le prime sette definizioni degli *Elementi* non sono altro che brani dell'opera di Erone, inseriti negli *Elementi* in età imperiale, non solo non può essere esclusa, ma appare del tutto plausibile.

3. Analisi di due definizioni del I libro degli "Elementi".

In questo paragrafo analizzeremo due definizioni del I libro degli *Elementi*, la def. 15 e la def. 22, che ci forniranno elementi importanti, anche se indiretti, sulla questione che ci interessa.

La def. 15 (di cerchio) interessa particolarmente poiché si tratta dell'unica definizione degli *Elementi* di cui abbiamo una versione precedente la corruzione del testo euclideo avvenuta nel III secolo, grazie al papiro ercolanese già citato.

La definizione contenuta nel papiro, che si ritiene essere quella originale, è:

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον,
πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἰ

¹¹ Ad esempio una prova alternativa della prop. 25 del I libro; cfr.[6], pp. 346-347.

προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

"Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea [tale che] tutti i segmenti incidenti su di essa [tracciati] da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura, sono tra di loro eguali".

La definizione data da Erone (def.27) inizia nel modo seguente:

Κύκλος ἐστὶ τὸ ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον ἐπίπεδον. τὸ μὲν οὖν σχῆμα καλεῖται κύκλος, ἡ δὲ περιέχουσα γραμμὴ αὐτὸ περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

"Il cerchio è una [figura] piana racchiusa da una linea. La figura è detta cerchio, e la linea che la racchiude circonferenza, se tutti i segmenti incidenti su di essa [tracciati] da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura, sono tra di loro eguali".

Il testo contenuto in tutti i manoscritti degli *Elementi* è:

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον ἢ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

"Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea, che è detta circonferenza, [tale che] tutti i segmenti incidenti su di essa [tracciati] da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura alla circonferenza del cerchio sono tra di loro eguali".

L'aggiunta dell'espressione πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ("alla circonferenza del cerchio") per specificare la seconda estremità dei segmenti, che nella frase era già chiaramente indicata con l'espressione πρὸς ἣν, che viene tuttavia conservata anch'essa, dimostra lo zelo ottuso con il quale il redattore aveva cercato di "completare" il testo di Euclide inserendo tutti i termini a suo giudizio mancanti.

Il confronto tra i tre testi mostra che l'inserimento della definizione di circonferenza, originariamente mancante, prima che nelle redazioni pervenuteci degli *Elementi*, era già presente in Erone. Questa circostanza, congiunta alla grande popolarità dell'opera di Erone, può suggerire la congettura che tale definizione sia stata prelevata da Erone.

La provenienza da Erone risulta chiara nel caso della def. 22 del I libro degli *Elementi*. Analizziamola in dettaglio. Essa inizia con le parole:

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ
ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν,
οὐκ ἰσόπλευρον δέ,....

"Tra i quadrilateri il quadrato è quello che è equilatero e rettangolo, l'*eteromekes* invece quello rettangolo ma non equilatero",
...

La proposizione iniziale è evidentemente una corretta definizione di quadrato. Poiché i quadrati sono usati in proposizioni fondamentali degli *Elementi*, come nel cosiddetto "teorema di Pitagora", non vi è alcun motivo per dubitare dell'autenticità di questa definizione. Le parole successive sono invece strane. Poiché la figura dell'*eteromekes* (il rettangolo non quadrato) non viene mai usata nel seguito degli *Elementi* non si capisce perché mai Euclide avrebbe dovuto inserire qui la sua definizione. Tutti i commentatori considerano sia questa frase che il resto della def. 22 una interpolazione inserita per completezza¹²; il confronto con il testo di Erone ne fa sospettare l'origine. Erone, infatti, aveva esplicitamente classificato i quadrilateri (nella def. 50) secondo una duplice ripartizione: equilateri e non equilateri, rettangoli e non rettangoli. Ne scaturivano quattro casi: il primo, quello del quadrilatero equilatero e rettangolo, è considerato nella definizione di quadrato (def. 51). Subito dopo (def. 52) viene il caso dell'*eteromekes*, definito esattamente come nel passo riportato della def. 22 degli *Elementi*. La definizione 22 continua elencando il terzo caso considerato da Erone, quello del rombo (anch'esso mai usato nel testo degli *Elementi* ed anch'esso definito esattamente con le parole usate nella successiva def. 53 di Erone). La definizione successiva di Erone (def. 54) esce dallo schema della quadripartizione, riguardando il romboide, che è un caso particolare dei quadrilateri non equilateri e non rettangoli. Il fatto che anche questa definizione corrisponda esattamente alla frase successiva della def. 22 degli *Elementi* (e che anche il romboide sia una figura mai più usata nel testo di Euclide) rafforza il sospetto che queste definizioni siano state attinte da Erone. Tale sospetto diviene certezza esaminando la conclusione della def. 22; la definizione si conclude con le parole:

τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.
"gli altri quadrilateri siano detti trapezi"

¹² Cfr., ad es., [2], vol.1, pag. 62.

Questa conclusione della definizione appare veramente misteriosa; il termine trapezio vi viene infatti evidentemente usato per un quadrilatero generico, senza lati paralleli. Poiché la parola greca *τράπεζα* significa "tavola" (in particolare quelle usate per le mense) la proprietà di avere due lati paralleli doveva aver caratterizzato il significato di tale termine sin dalla sua prima introduzione nel linguaggio della geometria. Del resto il termine *τράπεζα* viene usato nel senso attuale sia da Euclide stesso (nella sua opera *Sulla divisione delle figure*) che nella letteratura successiva: ad esempio nella classificazione dei quadrilateri che Proclo in [6] attribuisce a Posidonio. Anche questo uso misterioso del termine "trapezio" viene però spiegato facilmente se si pensa ad una sciatta trascrizione da Erone. Infatti, dopo la definizione di romboide, il testo di Erone continua con le definizioni 55, 56, 57 e 58, che sono relative ai parallelogrammi e ad altre figure (come lo "gnomone") con lati paralleli; queste definizioni non avrebbero potuto essere inserite nella def. 22, giacché sono basate sulla nozione di parallelismo, che negli *Elementi* viene introdotta solo nella successiva def. 23. La prima frase di Erone che non usa esplicitamente tale nozione è la def. 59: "I quadrilateri rimanenti sono o trapezi o trapezoidi"

Successivamente (nelle definizioni 60 e 61) i due casi sono distinti a seconda che il quadrilatero abbia o meno due lati paralleli. Sappiamo che i redattori del periodo imperiale lavoravano in genere con pochissimo acume e nessuna originalità, in particolare evitando accuratamente l'introduzione di termini non presenti in almeno una delle fonti a disposizione. Un tale redattore degli *Elementi* che avesse deciso di inserire nel testo tutte le frasi dell'opera di Erone che, a suo giudizio, avrebbero potuto completarlo, ben difficilmente avrebbe rinunciato a trascrivere la def. 59; essa infatti appare una naturale conclusione della classificazione dei quadrilateri e non contiene riferimenti espliciti alla nozione di parallelismo. Non potendo egli d'altra parte (in mancanza di tale nozione) seguire Erone nella distinzione tra trapezi e trapezoidi, cosa avrebbe potuto fare il nostro redattore se non racchiudere i due casi in un solo termine? Ed avendo a disposizione nella fonte i due termini trapezio e trapezoide, quale termine avrebbe potuto usare per questa classe più vasta se non quello di trapezio?

In definitiva, la def. 22 coincide con quella che si ottiene aggiungendo alla definizione di quadrato la trascrizione di tutte le definizioni di Erone che riguardano i quadrilateri e che non usano il termine "parallelo", introdotto negli *Elementi* nella def. 23. La def. 22 (se si eccettua la proposizione iniziale) è così chiaramente spuria, così facilmente interpretabile ammettendone la derivazione da Erone e di così difficile interpretazione in caso contrario, da non lasciare dubbi sulla sua provenienza. Abbiamo quindi la prova che le contaminazioni tra il testo di Erone e quello di Euclide abbiano riguardato non solo alcune proposizioni, come abbiamo già visto alla fine del §2, ma

anche alcune delle definizioni del I libro. D'altra parte altre definizioni del I libro sono certamente originali di Euclide, come abbiamo visto nel caso del cerchio (anche se non nella definizione, aggiunta successivamente, di circonferenza).

Il confronto tra le definizioni 15 e 22 e le definizioni corrispondenti presenti nel papiro ercolanese ed in Erone permette di trarre le seguenti conclusioni:

1. Il testo originale del I libro degli *Elementi* di Euclide conteneva alcune delle definizioni che attualmente vi sono inserite, come quella di cerchio.

2. Euclide non esitava ad usare termini geometrici non esplicitamente definiti. Il termine περιφέρεια ("circonferenza"), la cui definizione mancava nel testo originale della def. 15, è infatti usato nelle definizioni successive.

3. Le *Definizioni* di Erone contenevano sia ampliamenti ed illustrazioni delle definizioni di Euclide (come nel caso del cerchio) che definizioni di enti geometrici che Euclide non aveva definito, quali la circonferenza, l'*eteromekes*, il rombo, il romboide, il trapezio ed il trapezoide.

4. L'uso di termini geometrici non precedentemente definiti fu evitato in età imperiale, almeno in alcuni casi (quale quello della circonferenza), inserendo nel testo degli *Elementi* definizioni originariamente assenti.

5. Alcune delle definizioni successivamente incluse nel testo del I libro degli *Elementi* sono state tratte dall'opera di Erone. Ciò è avvenuto certamente per i vari quadrilateri diversi dal quadrato introdotti nella definizione 22 e probabilmente per la circonferenza.

4. Eterogeneità metodologica delle definizioni considerate rispetto al resto degli *Elementi*.

In base a quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente, ciascuna delle due possibilità considerate nel §1 si è effettivamente realizzata per alcune delle definizioni del I libro: la prima possibilità almeno nel caso della def. 15 (se si eccettua la definizione di circonferenza) e la seconda possibilità almeno nel caso della def. 22 (nella parte che non riguarda i quadrati).

Le prime sette definizioni, d'altra parte, appaiono in tutti i sensi un blocco omogeneo ed è quindi logico supporre che la loro origine sia comune. In queste condizioni il criterio fondamentale per

determinare tale origine, come del resto in tutte le analisi di autenticità, è certamente la coerenza interna dell'opera. Gli *Elementi* hanno una struttura in genere rigorosamente unitaria, in cui le varie proposizioni sono legate da rigide relazioni di implicazione logica. L'idea che le definizioni considerate siano una interpolazione è quindi fortemente suggerita dal fatto che esse non solo non sono mai usate nel resto dell'opera, ma neppure potrebbero esserlo. La loro eliminazione non farebbe che rafforzare la coerenza metodologica degli *Elementi*, che appare gravemente menomata da queste pseudo-definizioni (e poche altre dello stesso tipo), che sono in realtà frasi vaghe, basate sul linguaggio comune o su reminiscenze filosofiche.

Osserviamo poi che la necessità di basare le definizioni matematiche su alcuni enti fondamentali non definiti è del tutto analoga a quella di fondare le catene dimostrative su alcuni postulati non dimostrabili. Il capire una delle due necessità senza comprendere l'altra sembra davvero difficile. Euclide non solo è l'autore della prima opera a noi nota nella quale le dimostrazioni sono esplicitamente basate su postulati indimostrabili, ma è anche il matematico che ha genialmente capito di dovere inserire tra tali affermazioni quel famoso V postulato la cui indimostrabilità è stata finalmente accettata solo dopo più di ventuno secoli. Come mai lo stesso Euclide non si sarebbe reso conto di dover basare le sue definizioni su enti fondamentali non definiti?

Nelle opere matematiche antiche sopravvissute sono riconoscibili due concezioni degli enti matematici completamente diverse. Secondo la prima concezione gli enti matematici hanno una propria realtà oggettiva ed al matematico spetta solo la loro descrizione ed uso; si tratta della concezione che chiameremo "platonica", perché enunciata in maniera particolarmente limpida da Platone. Secondo tale concezione, che dominò in età imperiale, nel Medio Evo e nei primi secoli dell'Età Moderna, le definizioni matematiche (analogamente alle "definizioni" usate, ad esempio, dagli zoologi) hanno il fine di individuare entità preesistenti. Secondo l'altra concezione, che per intenderci chiameremo "costruttivista", gli enti matematici sono degli strumenti concettuali elaborati dall'uomo, che li costruisce mediante le definizioni. A chi condivide questa seconda concezione non può non essere chiara la necessità di evitare un rinvio all'infinito assumendo alcuni enti fondamentali come punto di partenza. Di tali enti fondamentali, creati come modello di oggetti concreti mediante un processo di astrazione, non si possono evidentemente dare le definizioni, ma si possono solo stabilire le "regole del gioco" del loro uso, enunciando i postulati da essi soddisfatti.

E' chiaro che si tratta di due concezioni incompatibili e che le sette definizioni che stiamo considerando hanno senso solo all'interno della concezione "platonica". Il nostro problema viene così ricondotto

a quello di determinare quale delle due concezioni fosse quella di Euclide. A questo fine facciamo alcune osservazioni.

1. La concezione che abbiamo chiamato "costruttivista" è evidente in altre definizioni contenute negli *Elementi* e certamente autentiche: in particolare in quella di proporzione. Infatti se si pensa ai "rapporti di grandezze" come a qualcosa di dotato di realtà oggettiva, l'eguaglianza di due rapporti appare una nozione ovvia, mentre Euclide adotta una definizione equivalente ad una complessa e raffinata "costruzione" del concetto di rapporto tra due grandezze¹³.

L'affermazione precedente è dimostrata dal fatto che tutti gli autori che hanno adottato la concezione "platonica" non hanno trovato nulla di criticabile nelle definizioni inserite all'inizio degli *Elementi*, mentre non hanno mai capito l'utilità della complessa definizione euclidea¹⁴ di proporzione, preferendo anche in questo caso (come fece, ad esempio, Galileo in [7]) una "definizione" puramente descrittiva.

Non a caso le sette "definizioni" che ci interessano, dopo essere state accettate senza problemi durante il Medio Evo e i primi secoli dell'Età Moderna, sono state criticate proprio quando si riuscì a recuperare la capacità di capire le definizioni costruttive, quale quella di proporzione.

2. Senza dilungarci in un'analisi di tutto il testo degli *Elementi*, che potrebbe fornire altre prove della sua natura "costruttivista", facciamo solo un altro esempio, che riguarda uno degli enti geometrici che ci interessano: il punto. Il concetto di punto (στιγμή) era stato a lungo analizzato in epoca pre-ellenistica all'interno della concezione che abbiamo chiamato "platonica". Anche, ad esempio, le analisi del concetto di punto contenute nei passi di Aristotele che abbiamo già citato erano state di questo tipo. Euclide, evidentemente per sottolineare la propria distanza da questa concezione, evita addirittura nella sua opera di usare il termine στιγμή, gravato da tutta questa tradizione di speculazioni filosofiche, preferendo parlare di σημείον, cioè di "segno". Il primo postulato, ad esempio, che in genere viene oggi enunciato affermando che esiste una retta che passa per due qualsiasi punti dati, nel testo di Euclide era:

Ἡτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημείον εὐθεῖαν γραμμὴν

¹³ La definizione di Euclide è sostanzialmente equivalente, come più volte è stato notato, alla moderna definizione costruttiva di numero reale, che in effetti non ne è che una traduzione nel linguaggio moderno.

¹⁴ Tale definizione viene in genere attribuita ad Eudosso. Non entrando qui nel problema della fondatezza di questa attribuzione, notiamo solo che non è mai stata messa in dubbio l'autenticità della definizione. Anche quindi se Euclide avesse tratto la sua definizione da Eudosso, l'averla inserita negli *Elementi* costituisce comunque una prova della concezione "costruttivista" di Euclide, che non avrebbe certo avuto difficoltà nel dare una qualsiasi "definizione" descrittiva (ed in sostanza vuota) del concetto di proporzione.

ἀγαγεῖν.

"Si ammetta di [poter] tracciare una linea dritta da ogni segno ad ogni segno".

Mi sembra che non avrebbe potuto esservi un modo più chiaro per tagliare i ponti con tutta la tradizione di speculazioni "platoniche" sugli enti geometrici e per evidenziare come la matematica non fosse lo studio di enti dotati di realtà oggettiva, ma un modello di particolari attività umane, in questo caso del disegno. L'idea che Euclide si fosse preoccupato di dare una definizione filosofica del "segno", quale quella inclusa nel testo degli *Elementi* come def. 1, appare del tutto incongruente con l'atteggiamento che emerge da questa precisa scelta terminologica. Osserviamo che mentre nel primo Ellenismo (ad esempio nelle opere di Archimede e di Apollonio) si usò esclusivamente il termine euclideo, in età imperiale si trova a volte di nuovo il termine *στιγμή* (ad esempio, come vedremo, in Sesto Empirico); tale termine finì con il riacquistare la supremazia, come dimostrato dal fatto che il termine attuale "punto" è la traduzione letterale (attraverso il latino) non del termine euclideo, ma di quello usato da Platone e da Aristotele¹⁵. Il fatto che in età imperiale la matematica fosse di nuovo basata su concezioni pre-ellenistiche aveva evidentemente influenzato anche la terminologia.

3. Il testo degli *Elementi*, per la sua natura di manuale elementare copiato a fini didattici, aveva ben poche possibilità di conservarsi inalterato. Per studiare le concezioni matematiche del primo Ellenismo è quindi particolarmente importante l'analisi di opere che, pur appartenendo alla stessa tradizione scientifica, hanno potuto conservarsi in una forma più vicina all'originale per la loro natura di testi più avanzati: ad esempio le opere di Archimede e di Apollonio. In queste opere non si trova nulla di analogo alle pseudo-definizioni degli enti fondamentali contenute negli *Elementi*. Inoltre sappiamo da Proclo ([6], p. 100) che Apollonio aveva discusso i concetti geometrici fondamentali descrivendone la genesi a partire dall'esperienza quotidiana, in particolare spiegando come il concetto di linea nasca dalla considerazione di oggetti, come le strade, dei quali si può chiedere a qualcuno di misurare "la lunghezza" con la certezza di essere capiti dall'interlocutore. L'evidente "modernità" di considerazioni di questo tipo deriva dal loro appartenere alla concezione "costruttivista". Sappiamo d'altra parte che Apollonio, sia nel metodo che nella terminologia, è sempre fedele alla tradizione euclidea e non sappiamo che avesse criticato le definizioni di Euclide.

¹⁵ Il termine *στιγμή* deriva infatti dal verbo *σίζω*, che significa "pungere".

4. Naturalmente si potrebbe obiettare che la presenza delle definizioni considerate, in un testo per il resto basato su concezioni completamente diverse, non implica necessariamente la loro non autenticità, potendo essere dovuta ad un atteggiamento eclettico da parte di Euclide. Notiamo però che tale eventuale eclettismo, mentre non è in alcun altro modo documentato né in Euclide né nei matematici del III sec. a. C., appare invece del tutto coerente con il clima culturale dell'età imperiale e in particolare con la personalità scientifica di Erone di Alessandria, che non esita a mescolare tradizioni diverse, ad esempio l'algebra mesopotamica con la geometria greca. E' quindi molto più naturale supporre che questa contaminazione della struttura assiomatico-deduttiva degli *Elementi* con definizioni di tipo "platonico" risalga a lui.

5. Notiamo infine che una testimonianza interessante, anche se indiretta, è fornita da Giamblico. All'inizio del VII libro degli *Elementi* l'unità viene definita come "ciò per cui ciascuna delle cose esistenti viene detta 'uno'". Tale "definizione", che appare chiaramente di stampo "platonico" e quindi dello stesso tipo di quelle degli enti geometrici fondamentali di cui ci stiamo occupando, viene citata da Giamblico [8] attribuendola a scrittori "più recenti" (οἱ νεώτεροι). E' naturale supporre che un analogo inserimento di definizioni pre-ellenistiche ad opera di autori "più recenti" abbia potuto riguardare enti geometrici.

Possiamo concludere che mentre le due possibilità prese in considerazione nel §1 sono entrambe plausibili sulla base della storia dei testi (come dimostrato dal fatto che entrambe si sono verificate per altre definizioni del I libro), la tesi che le prime sette definizioni degli "Elementi" siano interpolazioni provenienti dal manuale di Erone è la sola che sia coerente con le nostre conoscenze sulla storia della metodologia scientifica ellenistica. Nei prossimi due paragrafi troveremo alcuni riscontri a tale tesi analizzando alcune fonti e confrontando le due serie di definizioni.

5. Riscontri nelle fonti alla tesi proposta.

a. La prefazione di Erone alle *Definizioni*.

Una importante testimonianza è fornita da Erone stesso nelle prime parole delle sue *Definizioni* ([3], p.14) :

Descrivendo [ὑπογράφων] ed abbozzando per te, illustre Dionisio, il più concisamente possibile, i termini tecnici presupposti negli elementi di geometria [τὰ πρὸ τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως τεχνολογούμενα], assumerò come punto di partenza e come struttura generale l'insegnamento di Euclide, l'autore degli *Elementi*

della teoria geometrica;...

Questa introduzione fornisce degli importanti supporti alla nostra tesi. Infatti:

1. Erone, pur riferendosi agli *Elementi* come al testo fondamentale che ispira la struttura stessa della sua opera, non dice di illustrare i termini geometrici definiti negli *Elementi*, ma τὰ πρὸ τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως τεχνολογούμενα. La presentazione di Erone appare del tutto chiara supponendo che egli si fosse preoccupato di illustrare gli enti geometrici fondamentali lasciati indefiniti negli *Elementi*, che potrebbero, appunto, essere indicati come τὰ πρὸ τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως τεχνολογούμενα ("i termini tecnici presupposti negli elementi di geometria").

2. Erone non parla di "definizioni" ma solo di "descrizioni" dei concetti geometrici. Erone, infatti, dice di iniziare la sua opera "descrivendo" ὑπογράφων) i termini tecnici della geometria e le sue prime "definizioni" sono effettivamente lunghe illustrazioni, e non "definizioni" in senso tecnico. Evidentemente ad Erone era ancora chiara la differenza tra le "definizioni" e le "descrizioni", che egli fornisce degli enti fondamentali.

Il titolo dell'opera di Erone può sembrare in contraddizione con questa considerazione. In realtà il titolo presente nei manoscritti con ogni probabilità non è dovuto ad Erone. Infatti i manoscritti rimastici derivano da una raccolta bizantina, nella quale il titolo *Definizioni di Erone* serviva a distinguere il testo che abbiamo (probabilmente estratto da un'opera maggiore) da brani estratti da altri autori¹⁶. Il termine ὅροι non è usato da Erone nel corpo dell'opera nel senso di "definizioni".

3. Notiamo infine che il fatto che Erone consideri la propria opera "preliminare" alla lettura degli *Elementi* fornisce un forte sostegno alla congettura che egli, nella sua edizione commentata degli *Elementi*, avesse fatto precedere i vari libri di Euclide da estratti delle sue *Definizioni*.

b. Due testimonianze di Sesto Empirico.

Una delle principali fonti di informazione sul pensiero ellenistico è Sesto Empirico ed anche in questo caso la sua testimonianza è preziosa. Nei *Lineamenti del Pirronismo*, II 16 Sesto Empirico ([9], vol. I, p. 284) discute esplicitamente le "definizioni" (ὅροι). Poiché l'opera è un'esposizione degli argomenti dello scetticismo, il fine della discussione è naturalmente quello di escludere ogni possibile funzione

¹⁶ Cfr. l'introduzione di Heiberg in [3].

delle definizioni. La sua argomentazione, del tutto analoga a quella che usa contro i postulati, è per noi di estremo interesse. Egli scrive:

"E giacché, se ci proponiamo di definire tutto, non definiremo nulla, rinviando all'infinito [ogni definizione], mentre se ammettiamo che alcune cose possano essere comprese senza definizione, stiamo dichiarando che le definizioni non sono necessarie per la comprensione... perciò o non definiremo nulla o dichiareremo le definizioni non necessarie".

L'alternativa tra il rinvio all'infinito e l'accettazione di enti fondamentali non definiti, riportata da Sesto Empirico, doveva essere stata formulata originariamente nell'ambito della concezione che abbiamo chiamato "costruttivista". Infatti, come abbiamo già notato, se gli enti matematici debbono essere costruiti mediante delle definizioni tale alternativa risulta inevitabile, mentre il problema non si porrebbe all'interno della concezione "platonica". Si può infatti pensare di individuare enti dotati di realtà oggettiva attraverso una definizione descrittiva, che non presupponga altri concetti matematici. Sia il redattore del testo attuale degli *Elementi* che molti pensatori dell'Età Moderna (come, ad esempio, Descartes) avrebbero del resto rifiutato l'alternativa di Sesto, cercando di fondare l'edificio matematico su una solida base di tipo metafisico.

Osserviamo che Sesto Empirico non poteva certo criticare l'uso delle definizioni (ὄροι) da parte dei matematici senza prendere in considerazione gli *Elementi* di Euclide, l'opera cioè che, basata su delle definizioni, era alla base di tutti gli sviluppi matematici successivi (opera che egli, d'altra parte, dimostra più volte di conoscere bene). La scelta metodologica di Euclide riguardo alle definizioni deve quindi essere tra le possibilità prese in considerazione da Sesto. Poiché Euclide non aveva evidentemente elencato infinite definizioni, né aveva rinunciato a formularne, il passo citato suggerisce fortemente che nella redazione degli *Elementi* di cui disponeva Sesto "si ammettesse che alcune cose possano essere comprese senza definizione", in altre parole che tale redazione non contenesse le definizioni degli enti fondamentali.

In ogni caso il brano citato dimostra che la possibilità di costruire le definizioni a partire da enti non definiti (che abbiamo recuperato solo il secolo scorso) era certamente ancora presa in considerazione all'epoca di Sesto Empirico. Poiché le conoscenze scientifiche del 200 d.C. risalivano quasi esclusivamente al III e II sec. a.C., ben difficilmente Sesto Empirico avrebbe preso in considerazione questa possibilità se essa non fosse stata la scelta metodologica dei matematici del periodo aureo.

Un altro passo di Sesto Empirico sembra fornire, al contrario di quello già esaminato, un argomento a favore dell'autenticità delle

definizioni che stiamo esaminando. Nella sua opera *Contro i matematici*, III 20, nella sezione diretta contro i geometri, Sesto Empirico ([9] , vol. IV, p. 254) sembra infatti criticare la prima "definizione" degli *Elementi*, quella di punto. Si tratta effettivamente di un riferimento a Euclide? La risposta a questa domanda è cruciale: infatti, poiché Sesto, come sappiamo¹⁷, con ogni probabilità possedeva la versione originale degli *Elementi*, una risposta affermativa ci costringerebbe ad abbandonare la tesi fin qui sostenuta. In realtà Sesto scrive:

"Perciò essi [i matematici] descrivendo questi [enti] dicono che il punto [στιγμήν]¹⁸ è un "segno" [σημεῖον] senza parti e senza estensione, o l'estremità di una linea..."

Poiché la frase "il punto è un "segno" senza parti" coincide con la prima definizione di punto data negli *Elementi* e la caratterizzazione del punto come estremità di una linea con la seconda, i commentatori interpretano in genere la frase di Sesto come una citazione degli *Elementi*. Va notato però che quelle che nei secoli successivi sono state incluse negli *Elementi* come definizioni di punto sono menzionate qui insieme ad una terza caratterizzazione (la mancanza di estensione) e ciò rende difficile interpretare questo passo come una citazione di Euclide. Inoltre nessuna delle tre possibilità è considerata una "definizione" (ὄρος); nel brano citato si parla infatti di frasi che i matematici dicono "descrivendo" (ὑπογράφοντες) tali enti¹⁹. Poiché negli *Elementi* vi sono molte definizioni ma nessuna "descrizione", questo passo ben difficilmente può riferirsi ad Euclide.

Non è difficile, in realtà, individuare il matematico cui effettivamente Sesto Empirico si riferisce, giacché si tratta evidentemente di Erone. La descrizione del punto, che Sesto attribuisce genericamente a dei "matematici" non meglio identificati, coincide infatti quasi esattamente con il primo brano della lunga illustrazione del concetto di punto fornita da Erone nella prima delle sue "Definizioni". Data l'importanza della questione conviene confrontare i testi.

Erone, "descrivendo" (ὑπογράφων) gli enti geometrici, aveva iniziato con la frase "Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν ἢ πέρασ ἀδιάστατον ἢ πέρασ γραμμῆς"

Sesto Empirico afferma che essi (cioè "i matematici") "descrivendo" (ὑπογράφοντες) dicono che "στιγμήν μὲν εἶναι σημεῖον ἀμερῆς καὶ ἀδιάστατον ἢ πέρασ γραμμῆς".

¹⁷ Cfr. §1.

¹⁸ Per il significato dei termini στιγμήν e σημεῖον cfr. il precedente §4.

¹⁹ Un altro termine usato in un passo successivo della stessa opera, a proposito della "definizione" di linea, è ἀπόδοσις, cioè "esposizione" o "spiegazione" (Adv. Math., III, 98; [9], vol.IV, p. 292).

Sono esattamente le stesse parole, salvo la sostituzione dell'unico aggettivo ἀμερῆς all'espressione equivalente οὗ μέρος οὐθὲν e quel πέρας in più nella frase di Erone, che peraltro sembra essere un errore del copista²⁰. E' quindi chiaro che Sesto Empirico, parlando di coloro che "descrivono" il punto, si stesse riferendo ad Erone. Osserviamo che gran parte dei commentatori di Sesto Empirico non ha potuto individuare in Erone il matematico citato, giacché la datazione più probabile di Erone è stata considerata il III sec. d.C. fino a quando Neugebauer [10] la fissò finalmente alla seconda metà del I sec. d.C. ²¹ (più di un secolo prima di Sesto).

Una volta appurato che il passo citato si riferisce ad Erone e non ad Euclide, esso appare una preziosa conferma della nostra tesi. Se infatti le famose "definizioni" di punto contenute nei nostri manoscritti degli *Elementi* fossero state già incluse nell'opera di Euclide all'epoca di Sesto Empirico, non si capirebbe assolutamente perché Sesto, invece di criticare direttamente le "definizioni" di Euclide, avrebbe dovuto polemizzare con la "descrizione" del punto contenuta in un'opera di divulgazione del trattato euclideo, quale quella di Erone.

6. Analisi delle definizioni considerate.

Il confronto tra le prime sette definizioni degli *Elementi* e i brani corrispondenti dell'opera di Erone fornisce diversi argomenti a favore della nostra tesi.

Un primo indizio è fornito dalla stessa identità letterale tra le prime sette definizioni ed i brani corrispondenti di Erone. Mentre infatti tale identità appare una naturale conseguenza di un lavoro di redazione compiuto con lo spirito di un copista, essa mal si concilia con l'intenzione di "illustrare" i concetti geometrici da parte di una personalità come Erone, certamente dotata di autonomia intellettuale.

Si può pensare, naturalmente, che Erone nel caso delle prime definizioni avesse scelto di citare letteralmente Euclide. Non si capirebbe però in questo caso come mai non avesse separato le citazioni dai suoi commenti, facendone frasi distinte. Nel caso, ad esempio, della definizione di linea retta (che è riportata più avanti nelle due versioni contenute negli *Elementi* e nelle *Definizioni*, entrambe contrassegnate dal numero 4) nell'opera di Erone la

²⁰ Notiamo infatti che: 1) sembra più logico riferire l'aggettivo ἀδιάστατον (inesteso) direttamente a σημείον (punto) che non a πέρας (estremità); 2) ripetere due volte consecutive che il punto è un'estremità non sembra avere senso; 3) è ben strano dire genericamente che il punto è un'estremità senza dire di cosa e se, per brevità, si sottintende "di una linea" non ha senso dirlo subito dopo per esteso. L'interpretazione più logica sembra quella che il copista, ricopiando l'espressione citata da Sesto, abbia ommesso le parole καὶ ἀδιάστατον e, essendosene accorto subito dopo, abbia rimediato producendo la frase attuale.

²¹ La datazione di Neugebauer è molto attendibile, in quanto basata sull'individuazione di un'eclissi di luna descritta da Erone.

supposta citazione di Euclide ed il supposto commento sono fusi tra di loro (e con il resto del testo, grazie anche al legame sintattico dato dalle parole μὲν οὖν) formando un'unica frase scorrevole. E' ben strano che Erone si divertisse a costruire frasi nel suo stile discorsivo espandendo le definizioni di Euclide, conservate inalterate ed usate come elementi sintattici prefabbricati. Il procedimento inverso, consistente nell'isolare proposizioni semplici dal testo sintatticamente più complesso di Erone, può evidentemente aver portato in modo molto più naturale alle due stesure che ci sono rimaste.

Un altro argomento è basato sulla circostanza, molto sospetta, che il punto e la linea siano definiti ciascuno due volte (il punto nelle def. 1 e 3 e la linea nelle def. 2 e 6). Avere due definizioni indipendenti dello stesso ente è una chiara incongruenza logica e sembra molto strano che una incongruenza di questo tipo sia potuta sfuggire a Euclide. Il fine di tutto il trattato è inoltre proprio quello di trovare la strada logicamente più breve dalle definizioni più semplici ai teoremi relativamente più complessi e duplicare definizioni non serve certo a questo scopo. Del resto anche nel caso delle proposizioni dimostrate due volte negli *Elementi* si è potuta sempre provare l'origine spuria di almeno una delle dimostrazioni.

Queste definizioni duplici sono facilmente spiegabili accettandone la derivazione da Erone, che aveva illustrato i concetti di punto e linea elencandone molte diverse caratterizzazioni. E' naturale infatti che il compilatore della redazione degli *Elementi* che ci è stata tramandata, dovendo decidere quali delle frasi di Erone conservare come "definizioni" da inserire nel testo, in alcuni casi abbia potuto essere così indeciso da preferire conservarne due. Illustriamo questa situazione con il caso del punto. Erone scrive:

"Il punto è ciò che non ha parti ed un'estremità senza estensione o l'estremità di una linea ed essendo qualcosa senza parti e senza estensione può essere solo afferrato con il pensiero. Dicono che sia come l'attimo di tempo o come un'unità dotata di posizione. Ha dunque la stessa natura dell'unità, in quanto entrambi sono indivisibili, incorporei e senza parti; essi differiscono però..."

Una lunga illustrazione discorsiva di questo tipo non avrebbe potuto certo essere inserita inalterata nella stringata prosa degli *Elementi*. Per diminuirne la distanza stilistica con il testo di Euclide, l'espedito più ovvio sarebbe stato quello di troncare il brano di Erone trascrivendone solo la prima proposizione. Le prime cinque parole del brano di Erone, σημείον ἐστίν, οὗ μέρος οὐθέν ("il punto è ciò che non ha parti") costituiscono effettivamente la def. 1 contenuta negli *Elementi*. Non sarebbe stato però facile rinunciare a tutte le altre caratterizzazioni del punto, in particolare a quella del punto come

estremità della linea. Questa seconda caratterizzazione è presente anch'essa negli *Elementi*, come def. 3.

Una situazione del tutto analoga riguarda le due definizioni di linea.

Abbiamo già visto come l'analisi linguistica della definizione 4 (di linea retta) fornisca un indizio sulla sua non autenticità. L'analisi del contenuto di tale definizione fornisce invece un argomento decisivo. La definizione contenuta negli "Elementi" è: εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. Tra le varie traduzioni proposte per questa frase la migliore è forse quella che abbiamo già dato nel §1: "linea retta è [quella] che giace allo stesso modo rispetto a [tutti] i suoi punti".

In ogni caso il significato rimane oscuro²². L'unica interpretazione possibile sembra quella che la linea retta sia "vista" da tutti i suoi punti allo stesso modo, in altre parole che esistano movimenti rigidi che, lasciando invariante la linea, portino alla sovrapposizione di due qualsiasi dei suoi punti. Questa proprietà, che Apollonio aveva chiamato "omeomerismo"²³, non caratterizza però la retta, ma è condivisa anche dalle eliche cilindriche e, volendosi restringere a curve piane, dalle circonferenze. Non poteva certo sfuggire ad Euclide che, comunque si voglia precisare il senso della frase riprodotta, non si riescono ad escludere da questa "definizione" le circonferenze, che certamente "giacciono allo stesso modo rispetto a tutti i loro punti".

La "definizione" di retta è quindi misteriosa ancor più di quella di trapezio, che abbiamo esaminato nel §3. Come in quel caso il mistero si svela facilmente ricorrendo ad Erone.

La "definizione" di Erone inizia infatti con la frase:

Εὐθεῖα μὲν οὖν γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐπ' αὐτῆς σημείοις κεῖται ὀρθῆ οὖσα καὶ οἶον ἐπ' ἄκρον τεταμένη ἐπὶ τὰ πέρατα, "linea retta è [quella] che allo stesso modo rispetto a [tutti] i suoi punti giace dritta e tesa al massimo tra gli estremi".

L'origine di questa caratterizzazione della retta è individuabile con ragionevole sicurezza in Archimede. Archimede, infatti, all'inizio del primo libro dell'opera "Sulla sfera e sul cilindro" ([11], p.10) aveva assunto che tra tutte le linee con le stesse estremità il segmento di retta avesse la minima lunghezza. E' importante osservare che quella di Archimede, coerentemente alla tradizione del primo Ellenismo (almeno secondo la tesi che stiamo sostenendo) non era affatto una "definizione". Si trattava proprio del primo dei postulati

²² Heath, ad esempio, ([2], vol. I, pag. 167) conclude la sua analisi linguistica di questa definizione affermando che "the language is thus seen hopelessly obscure".

²³ Nel lavoro perso περὶ τοῦ κοιλίου (sul quale siamo informati da Proclo, [6], 105, 1-6) Apollonio aveva dimostrato che le eliche cilindriche sono, appunto, curve "omeomeriche".

(λαμβάνόμενα) dell'opera archimedeo. La dipendenza da Archimede (resa plausibile dal grande interesse di Erone per il fondatore della meccanica scientifica) diviene più chiara analizzando il seguito dell'illustrazione di Erone, che in particolare usa lo stesso superlativo di Archimede ἐλαχίστη per "più breve". Erone però, volendo trasformare il postulato archimedeo in una caratterizzazione della linea retta, non poteva evidentemente limitarsi a una data coppia di punti, ma doveva aggiungere che la proprietà individuata da Archimede doveva verificarsi "allo stesso modo rispetto a [tutti] i suoi punti", cioè ἐξ ἴσου τοῖς ἐπ' αὐτῆς σημείοις. La frase di Erone è quindi del tutto chiara.

Sappiamo che l'oscuro redattore che ci ha lasciato gli *Elementi* nell'attuale forma non era un matematico di qualche valore, ma essenzialmente un copista. Si può quindi supporre che egli, avendo deciso di inserire i primi brani delle illustrazioni di Erone come "definizioni" con cui iniziare gli *Elementi*, abbia troncato la frase di Erone non appena si potesse ottenerne una proposizione sintatticamente corretta, anche se priva di contenuto matematico. Il fatto che seguendo questo procedimento si ottenga esattamente la "definizione" tradizionalmente inserita nel testo di Euclide, cui d'altra parte nessun matematico è mai riuscito a dare un senso compiuto, dimostra l'attendibilità della ricostruzione.

7. Conclusioni.

In conclusione dalle considerazioni svolte fin qui emerge naturalmente la seguente ricostruzione:

a) Euclide non aveva affatto inserito nella sua opera le prime sette definizioni, lasciando correttamente non definiti gli enti fondamentali.

b) In età imperiale il decadimento del livello scientifico rese incomprensibile la scelta di Euclide e la mancanza delle definizioni degli enti geometrici fondamentali apparve una lacuna del testo degli *Elementi*.

c) Tale supposta lacuna fu colmata inserendo nel testo degli *Elementi* estratti del manuale didattico compilato da Erone di Alessandria ([3]), che aveva attinto liberamente sia alla tradizione pre-ellenistica che ai matematici del III sec. a.C..

Il caso che abbiamo considerato in questo lavoro è un esempio di un fenomeno molto più generale. Possiamo conoscere la scienza ellenistica del periodo aureo solo attraverso il filtro dei redattori di età imperiale e medievali. Essi non solo ci hanno conservato solo le opere più elementari (ad esempio trascurando di conservarci le opere che

Euclide aveva scritto sugli argomenti matematici più elevati), ma ne hanno anche alterato il testo adattandolo alle proprie concezioni, basate sulla filosofia pre-ellenistica. Il risultato spesso è stato, come nel caso considerato, quello di deformare a tal punto la scienza ellenistica da determinarne una grave sottovalutazione.

Ringraziamenti

La prima idea di questo lavoro è nata nel corso di conversazioni con Giovanni Gallavotti e Giovanni Stelli.

Sono stati per me essenziali l'incoraggiamento e l'approvazione di Carlo Gallavotti, il cui interesse per la matematica ellenistica, essendo così raro tra i filologi classici, è stato probabilmente uno degli aspetti meno noti della sua multiforme attività, ma anche quello che sono stato in grado di apprezzare meglio.

Bibliografia.

1. "Euclidis Opera Omnia", eds. I.L.Heiberg, H.Menge, Leipzig, 1895, voll. I-V.
2. "The thirteen books of Euclid's Elements", translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, New York, 1956.
3. "Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia". Vol. IV: "Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur geometrica". Copiis Guilelmi Schmidt usus edidit J.L.Heiberg, Leipzig, 1899.
4. A. Rome (ed.): Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. Tome II: Théon d'Alexandrie: "Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste. Città del Vaticano . 1936.
5. "Euclidis Opera Omnia", eds. I.L.Heiberg, H.Menge, Leipzig, 1895, vol. VII.
6. "Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii", ed. G. Friedlein, Leipzig, 1873.
7. Galileo: "Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a Due Nuove Scienze", giornata aggiunta sulle proporzioni di Euclide.
8. Giamblico: "In Nicomachi Arithmetica Introductionem", ed. N. Pistelli, Leipzig, 1894.
9. Sextus Empiricus, transl. by R.G.Bury, London, 1949, 4 voll..

10. O. Neugebauer, in "Kgl. Danske Vidensk. Selsk, hist.-filol. medd." 26, 2 e 7 (1938 e 1939).

11. "Archimède". Texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris, 1971. Tome I.