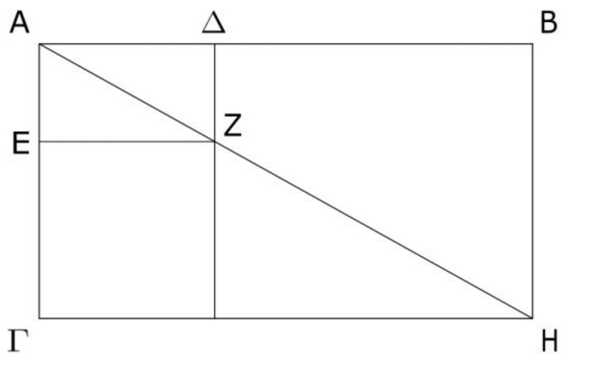
La composizione dei moti e il moto circolare nella *Meccanica* pseudo-aristotelica e in Plutarco

Lucio Russo

Nei *Mechanica* giunti nel corpus aristotelico è esposta la regola oggi detta “del parallelogramma” per la composizione degli spostamenti:

Quando il moto avviene in un dato rapporto, necessariamente il punto mobile si muove lungo una retta, e sarà la diagonale della figura che descrivono le linee che sono in questo rapporto. Il rapporto secondo il quale avviene il moto sia quello tra AB e $A\Gamma$. Si sposti $A\Gamma$ verso B e AB in basso, verso $H\Gamma$; sia giunto A in Δ e AB in E. Se dunque nel moto il rapporto era quello tra AB e $A\Gamma$, necessariamente anche $A\Delta$ avrà questo rapporto con AE. Il piccolo quadrilatero è dunque proporzionalmente simile al maggiore, cosicché la loro diagonale sarà la stessa e A sarà in Z. [1]

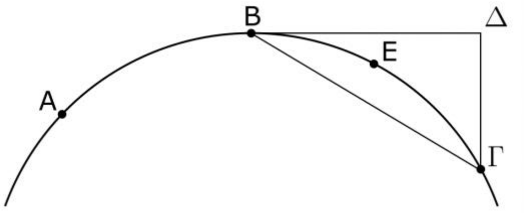


L’esposizione è abbastanza chiara. Bisogna solo osservare che i moti sono implicitamente considerati uniformi (altrimenti il moto risultante non avverrebbe in generale sulla diagonale). Un’esposizione molto simile è nella *Meccanica* di Erone di Alessandria (I, 8), dove l’uniformità dei moti è però assunta esplicitamente.
Poco dopo la composizione (o decomposizione) degli spostamenti è applicata al caso di un moto circolare, in un passo molto interessante che a mio parere è stato in genere frainteso. Lo pseudo-Aristotele scrive:

---

[1] ὅταν μὲν οὖν ἐν λόγῳ τινὶ φέρηται, ἐπ’ εὐθείας ἀνάγκη φέρεσθαι τὸ φερόμενον, καὶ γίνεται διάμετρος αὐτὴ τοῦ σχήματος ὃ ποιοῦσιν αἱ ἐν τούτῳ τῷ λόγῳ συντεθεῖσαι γραμμαί. ἔστω γὰρ ὁ λόγος ὃν φέρεται τὸ φερόμενον, ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ· καὶ τὸ μὲν ΑΓ φερέσθω πρὸς τὸ Β, ἡ δὲ ΑΒ ὑποφερέσθω πρὸς τὴν ΗΓ· ἐνηνέχθω δὲ τὸ μὲν Α πρὸς τὸ Δ, ἡ δὲ ἐφ’ ᾗ ΑΒ πρὸς τὸ Ε. εἰ οὖν ἐπὶ τῆς φορᾶς ὁ λόγος ἦν ὃν ἡ ΑΒ ἔχει πρὸς τὴν ΑΓ, ἀνάγκη καὶ τὴν ΑΔ πρὸς τὴν ΑΕ τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τῷ λόγῳ τὸ μικρὸν τετράπλευρον τῷ μείζονι, ὥστε καὶ ἡ αὐτὴ διάμετρος αὐτῶν, καὶ τὸ Α ἔσται πρὸς Ζ. (pseudo-Aristotele, *Mechanica*, 848b, 9-21).

Sia il cerchio $AB\Gamma$, e il punto alla sommità B si sposti verso Δ; ma poi arriverà in Γ. Se si muovesse nel rapporto che $B\Delta$ ha con $\Delta\Gamma$, si muoverebbe lungo la diagonale $B\Gamma$. In questo caso però, non essendovi rapporto, si muove sulla circonferenza $BE\Gamma$.[2]



In questo passo non è del tutto chiaro quali siano i due moti (o spostamenti) *senza rapporto* (torneremo su questo punto) la cui combinazione genera il moto circolare. Un passo successivo dei *Mechanica* chiarisce però a mio avviso in modo esauriente questo punto. Lo pseudo-Aristotele scrive infatti:

Ciò accade per ogni linea che descrive un cerchio; si muove lungo la circonferenza, secondo natura lungo la tangente, ma contro natura verso il centro.[3]

I due spostamenti sono quindi diretti l'uno «secondo natura» lungo la tangente e l'altro, «contro natura», verso il centro. Tra questi due spostamenti - afferma l'autore - non vi è alcun rapporto (οὐδενὶ λόγῳ): questa chiara affermazione ha creato problemi in molti commentatori e traduttori che, per ottenere un significato comprensibile, ne hanno dato spesso interpretazioni non aderenti al testo originale.[4]
Per capire il significato dato dai matematici del primo ellenismo all'affermazione che due grandezze non hanno rapporto, conviene ovviamente leggere i loro testi. Euclide (*Elementi*, V, def. 4) definisce questo concetto senza alcuna ambiguità:

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Due grandezze non hanno quindi rapporto quando nessun multiplo della minore supera la maggiore. Detto in termini intuitivi, quando una è infinitamente più piccola dell'altra.
Ad esempio un segmento non ha rapporto con un quadrato. Negli *Elementi* vi è un solo esempio di grandezze con lo stesso nome (in questo caso due *angoli*, nel senso in cui Euclide usa questo termine) senza rapporto: è il caso dell'*angolo di contingenza* (formato

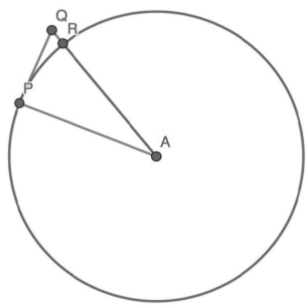
[2] ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δ' ἄκρον τὸ ἐφ' οὗ Β φερέσθω ἐπὶ τὸ Δ· ἀφικνεῖται δέ ποτε ἐπὶ τὸ Γ. εἰ μὲν οὖν ἐν τῷ λόγῳ ἐφέρετο ὃν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, ἐφέρετο ἂν τὴν διάμετρον τὴν ἐφ' ᾗ ΒΓ. νῦν δέ, ἐπείπερ ἐν οὐδενὶ λόγῳ, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν φέρεται τὴν ἐφ' ᾗ ΒΕΓ. (pseudo-Aristotele, *Mechanica*, 849a, 3-6).

[3] πάσῃ μὲν οὖν κύκλον γραφούσῃ τοῦτο συμβαίνει, καὶ φέρεται κατὰ τὴν περιφέρειαν, τὴν μὲν κατὰ φύσιν εἰς τὸ πλάγιον, τὴν δὲ παρὰ φύσιν καὶ τὸ κέντρον. (pseudo-Aristotele, *Mechanica*, 849a, 14-17).

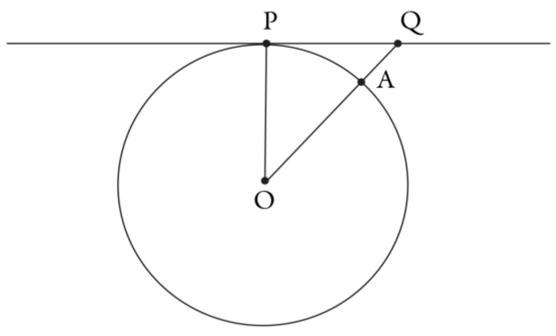
[4] Ad esempio W. S. Hett, nell'edizione dell'opera da lui curata per la Loeb Classical Library, traduce l'espressione ἐν οὐδενὶ λόγῳ "in no such proportion"; Maria Elisabetta Dehò preferisce tradurre "senza un rapporto fisso", introducendo l'aggettivo *fisso* senza alcun corrispondente nel testo originale. Un raro caso di traduzione fedele al testo ("il rapporto non sussiste") è quella di Maria Fernanda Ferrini.

da un arco di circonferenza con la tangente in un suo estremo), che non ha rapporto con alcun angolo rettilineo (ossia con alcun *angolo*, nel senso moderno del termine)[5]. È un esempio particolarmente illuminante, poiché, proprio come il passo pseudo-aristotelico che stiamo esaminando, si può tradurre nell'affermazione che un piccolo arco di circonferenza può essere approssimato con un tratto della tangente commettendo un errore "infinitesimo", nel senso che preciseremo.

Alla luce della definizione di Euclide, i due passi dei *Mechanica* che abbiamo citato, relativi al moto circolare, possono essere interpretati come l'affermazione che in un moto circolare un arco PR della traiettoria possa essere scomposto in uno spostamento PQ lungo la tangente e uno spostamento (senza rapporto, ossia infinitamente più piccolo) QR diretto verso il centro.



Questa affermazione divenne un teorema rigoroso grazie ad Archimede, che dimostrò che se consideriamo una circonferenza di centro O, la retta tangente alla circonferenza in un punto P, un punto Q sulla tangente, congiungiamo Q con O e diciamo A l'intersezione della circonferenza con il segmento OQ, allora al tendere di Q a P, il segmento AQ (nel linguaggio moderno) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a PQ. Archimede dimostrò infatti che, dato un qualsiasi rapporto r, il rapporto tra AQ e PQ è minore di r se Q è sufficientemente vicino a P.[6]

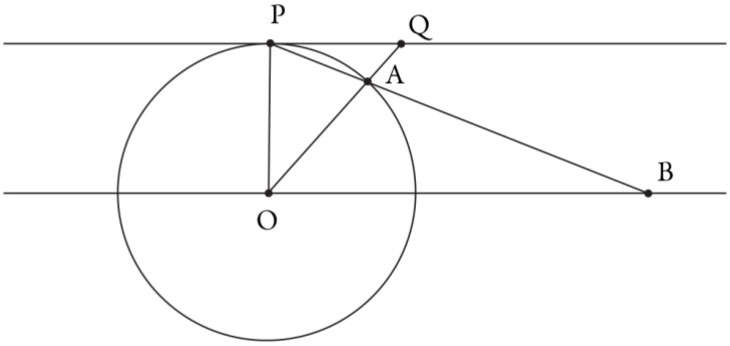


Vale la pena riportare la dimostrazione di Archimede, che è un gioiello di semplicità.

---

[5] Euclide, *Elementi*, III, prop. 16.

[6] Archimede, *Sulle spirali*, prop. 5.



Archimede considera la retta passante per il centro O della circonferenza e parallela alla tangente in P e prolunga il segmento PA fino a incontrare in B la nuova retta. Poiché, come è immediato verificare, i triangoli PQA e BOA sono simili, il rapporto che ci interessa, AQ/PQ è uguale al rapporto OA/OB. Questo secondo rapporto può d'altra parte essere reso arbitrariamente piccolo poiché il numeratore OA è sempre un raggio del cerchio e il segmento OB può essere arbitrariamente lungo (si può infatti fissare arbitrariamente la posizione di B e dedurne quelle di A e Q). Il teorema è così dimostrato.

Le considerazioni svolte finora permettono di congetturare ragionevolmente alcuni aspetti tecnici di una teoria dinamica ellenistica sulla quale abbiamo la testimonianza di Plutarco. Nel *De facie quae in orbe lunae apparet* Plutarco scrive tra l'altro:

Il moto secondo natura guida infatti ogni corpo, se non è deviato da qualcos'altro.[7]

Non bisogna dare ascolto ai filosofi se vogliono respingere paradossi con paradossi e, combattendo le stranezze di alcune dottrine, ne inventano di ancora più strane e stravaganti, come costoro che introducono la φορά verso il centro. Quale paradosso vi manca? [8] *[...] Non che massi incandescenti del peso di mille talenti spinti attraverso le profondità della terra, qualora giungessero al centro si fermerebbero, senza incontrare nulla cui appoggiarsi, e se spinti verso il basso con velocità superassero il centro, si volgerebbero di nuovo indietro e andrebbero su e giù tra questi [punti di svolta]? [...] Non che una corrente impetuosa d'acqua spinta verso il basso, se giungesse al punto centrale, che essi stessi dicono incorporeo, si fermerebbe sospesa, girerebbe in cerchio e oscillerebbe con una incessante e perpetua oscillazione?* [9]

---

[7] ἄγει γὰρ ἕκαστον ἡ κατὰ φύσιν κίνησις, ἂν ὑπ' ἄλλου μηδενὸς ἀποστρέφηται. (Plutarco, *De facie …*, 923C, 11 – 923D, 2)

[8] φιλοσόφων δ' οὐκ ἀκουστέον, ἂν τὰ παράδοξα παραδόξοις ἀμύνεσθαι βούλωνται καὶ μαχόμενοι πρὸς τὰ θαυμάσια τῶν δογμάτων ἀτοπώτερα καὶ θαυμασιώτερα πλάττωσιν, ὥσπερ οὗτοι τὴν ἐπὶ τὸ μέσον φορὰν εἰσάγουσιν. ἦ τί παράδοξον οὐκ ἔνεστιν; (ivi, 923F, 6 – 924A, 3).

[9] οὐ μύδρους χιλιοταλάντους διὰ βάθους τῆς γῆς φερομένους, ὅταν ἐξίκωνται πρὸς τὸ μέσον, ἵστασθαι μηδενὸς ἀπαντῶντος μηδ' ὑπερείδοντος, εἰ δὲ ῥύμῃ κάτω φερόμενοι τὸ μέσον ὑπερβάλλοιεν, αὖθις ὀπίσω στρέφεσθαι καὶ ἀνακάμπτειν ἀπ' αὐτῶν; [...] οὐ ῥεῦμα λάβρον ὕδατος κάτω φερόμενον εἰ πρὸς τὸ μέσον ἔλθοι σημεῖον, ὅπερ αὐτοὶ λέγουσιν ἀσώματον, ἵστασθαι περικρεμαννύμενον, κύκλῳ περιπολεῖν, ἄπαυστον αἰώραν καὶ ἀκατάπαυστον αἰωρούμενον;

Il termine $\varphi o \rho \acute{\alpha}$ usato da Plutarco è stato in genere tradotto «moto», ma quasi nessuno dei moti descritti da Plutarco è diretto verso il centro; usando la terminologia moderna, tutti hanno invece *accelerazione* diretta verso il centro.
D'altra parte il concetto di accelerazione non poteva essere presente nella scienza greca, anche perché non era ritenuto lecito considerare rapporti tra grandezze non omogenee.
Nel linguaggio moderno (usando il grassetto per indicare grandezze vettoriali), lo spostamento infinitesimo **ds** di un punto mobile con velocità **v** e accelerazione **a**, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, è il vettore

$$\mathbf{ds} = \mathbf{v}dt + 1/2\ \mathbf{a}(dt)^2$$

Gli scienziati ellenistici non usavano le grandezze velocità e accelerazione, ma, alla luce delle considerazioni già fatte, possiamo pensare che, coerentemente all'impostazione geometrica della loro meccanica, decomponessero uno spostamento, come nella formula precedente, in due infinitesimi di diverso ordine: la $\varphi o \rho \acute{\alpha}$ usata dalla fonte di Plutarco era quindi presumibilmente uno spostamento infinitesimo verso il centro che, componendosi con lo spostamento «secondo natura» diretto lungo la tangente, generava lo spostamento reale. In questo caso la descrizione del moto sarebbe stata sostanzialmente equivalente a quella moderna. Non è difficile verificare che componendo il moto rettilineo secondo natura con uno spostamento (infinitesimo di ordine superiore) verso un punto centrale si possono ottenere non solo moti circolari, ma anche gli altri moti descritti da Plutarco.